**Задание на контрольную работу по курсу «Эконометрика»**

**Задача 1.** Построить модель, отражающую зависимость среднесуточной производительности (Y) от стоимости основных производственных фондов (X), проверить ее адекватность, осуществить точечный и интервальный прогноз.

Методические указания по выполнению задачи

Студент выполняет вариант для задачи 1 из таблицы 1 и 2, номер которого совпадает с последней цифрой номера его зачетной книжки.

 **Таблица 1**

|  |
| --- |
| Стоимость основных производственных фондов (Х, млн. руб.) |
| Вариант | Номер наблюдения (Номер предприятия) |
| 1 | 2 | 3 | 4 | **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2,0 | 2,3 | 2,1 | 2,4 | 2,9 | 3,3 | 3,8 | 4,6 | 5,1 | 5,4 |
| 2 | 12,2 | 14,3 | 17,0 | 16,5 | 20,3 | 19,4 | 22,5 | 26,9 | 30,0 | 29,0 |
| 3 | 4,0 | 5,5 | 7,2 | 7,0 | 8,2 | 10,4 | 10,1 | 8,8 | 11,3 | 14,0 |
| 4 | 12,.5 | 11,1 | 9,0 | 7,9 | 8,5 | 5,6 | 5,0 | 6,2 | 4,7 | З,0 |
| 5 | 2,3 | 2,5 | 2,0 | 2,9 | 3,3 | 3,8 | 5,0 | 4,0 | 7,4 | 7,5 |
| 6 | 2,1 | 2,9 | 3,3 | 3,8 | 4,2 | 3,9 | 5,0 | 4,9 | 6,3 | 5,8 |
| 7 | 11,1 | 9,0 | 7,9 | 5,6 | 6,1 | 4,5 | 5,9 | 4,2 | 4,1 | 3,3 |
| 8 | 5,9 | 7,2 | 11,0 | 10,5 | 12,6 | 14,8 | 15,0 | 16,0 | 18,9 | 17,2 |
| 9 | 19,1 | 20,7 | 20,2 | 22,8 | 22,8 | 27,4 | 24,7 | 30,2 | 33,4 | 31,0 |
| 0 | 2,3 | 2,1 | 2,9 | 3,3 | 3,8 | 5,0 | 4,8 | 6,7 | 6,8 | 6,2 |

 **Таблица 2**

|  |
| --- |
| Среднесуточная производительность (У, тонн) |
| Вариант | Номер наблюдения (Номер предприятия) |
| 1 | 2 | 3 | 4 | **5** | 6 | 7 | **8** | 9 | 10 |
| 1 | 14,3 | 18,6 | 20,9 | 18,7 | 24,2 | 22,3 | 25,7 | 27,0 | 32,2 | 31,0 |
| 2 | 112,0 | 104,3 | 99,6 | 95,4 | 83,0 | 70,0 | 75,7 | 72,2 | 69,5 | 66,0 |
| 3 | 18,6 | 19,1 | 20,7 | 20,2 | 22,3 | 25,4 | 30,2 | 29,6 | 35,7 | 34,0 |
| 4 | 24,0 | 29,4 | 34,2 | 30,6 | 35,2 | 47,3 | 44,2 | 45,0 | 50,3 | 47,0 |
| 5 | 9,1 | 10,7 | 10,2 | 12,3 | 12,8 | 8,4 | 12,3 | 15,0 | 16,3 | 15,5 |
| 6 | 91,0 | 94,3 | 99,6 | 95,4 | 83,0 | 92,3 | 100,0 | 106,.3 | 112,8 | 110,2 |
| 7 | 34,2 | 30,6 | 35,2 | 40,7 | 43,5 | 48,3 | 49,6 | 53,5 | 50,5 | 54,0 |
| 8 | 29,3 | 34,2 | 30,6 | 35,2 | 40,7 | 44,5 | 47,2 | 55,2 | 51,8 | 56,2 |
| 9 | 64,5 | 70,2 | 79,3 | 74,6 | 81,4 | 83,0 | 88,2 | 83,5 | 94,2 | 99, 0 |
| 0 | 23,9 | 24,7 | 22,4 | 25,1 | 27,0 | 29,4 | 34,2 | 30,6 | 35,2 | 33.,0 |

Задание на выполнение задачи 1: (Алгоритм действий)

1). Исходные данные отложите на координатной плоскости и сделайте предварительное заключение о наличии связи, виде (прямая или обратная) и форме (линейная или нелинейная) связи между признаками X и У.

2). Рассчитайте линейный коэффициент корреляции . Используя t-критерий Стьюдента, проверьте значимость коэффициента корреляции, как показателя близости зависимости к линейной. Сделайте вывод о тесноте связи между признаками X и У.

3). Полагая, что связь между факторами X и У может быть
описана линейной функцией, используя процедуру метода
наименьших квадратов, получите систему нормальных
уравнений относительно коэффициентов линейного уравнения регрессии (запишите систему нормальных уравнений). Любым способом рассчитайте эти коэффициенты.

4). Для полученной модели связи между признаками X и У
рассчитайте среднюю ошибку аппроксимации (е). Сделайте
предварительное заключение о приемлемости полученной
модели.

5). Проверьте значимость коэффициентов уравнения регрессии на основе t-критерия Стьюдента. Сформулируйте вывод.

6). Проверьте адекватность модели (уравнения регрессии) в целом на основе

 F-критерия Фишера-Снедекора.

Сформулируйте вывод.

7). Рассчитайте средний коэффициент эластичности (Э) . Что он

показывает?

8). Выполните точечный прогноз для .

9). Рассчитайте доверительные интервалы для уравнения регрессии и для результативного признака  при  и доверительной вероятности .

10). Изобразите в одной системе координат: исходные данные, линию регрессии, точечный прогноз (х\*,у\*) и отметьте доверительный интервал для .

11). Сформулируйте общий вывод относительно полученной математической модели.

**Задача 2.**

 Для прогнозирования квартального спроса плодоовощных консервов в регионе были проанализированы данные по кварталам в период с 2002 по 2005 годы, которые представлены в таблице 3.

Требуется сделать прогноз средний квартальный спрос плодоовощной продукции на четыре квартала 2006 года с надежностью 0,95 и построить автокорреляционную функцию, характеризующую внутреннюю структуру спроса. Построение аддитивной математической модели и прогнозные расчеты провести по алгоритму, изложенному в данном методическом указании, с изображением элементов временного ряда на графиках.

**Примечание:** Из таблицы 3 видно, что спрос в своей динамике содержит сезонные колебания, которые можно объяснить снижением спроса на консервы в летние и осенние месяцы в связи с появлением на рынке свежей плодоовощной продукции.

 Таблица 3.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Годы | Номер квартала | Фактический спрос, т |
|
| 2002 | 1 | 7,5 |
| 2 | 7,7 |
| 3 | 4,2 |
| 4 | 6,7 |
| 2003 | 5 | 8,6 |
| 6 | 9,5 |
| 7 | 5,4 |
| 8 | 10,7 |
| 2004 | 9 | 11,8 |
| 10 | 12,5 |
| 11 | 5,8 |
| 12 | 12,4 |
| 2005 | 13 | 13,4 |
| 14 | 12,7 |
| 15 | 6,8 |
| 16 | 12,2 |

**Задача 3.** Пусть в таблице 4 представлены данные наблюдений за динамикой объемов производства в зависимости от объема инвестиций в предприятие.

 В таблице 4  - объем производства, тыс. руб.,  - объем инвестиций в предприятие, тыс. руб..

 Таблица 4

**Динамика объемов производства *(у,* в ценах 1987 г.,тыс. руб.)**

**и валовых внутренних инвестиций в предприятие**

***(х,* в ценах 1987 г., тыс. руб.)\***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Год | Y | X |
| 1987 | 2965 | 480 |
| 1988 | 3109 | 532 |
| 1989 | 3268 | 591 |
| 1990 | 3248 | 543 |
| 1991 | 3221 | 437 |
| 1992 | 3380 | 520 |
| 1993 | 3533 | 600 |
| 1994 | 3703 | 664 |
| 1995 | 3796 | 669 |
| 1996 | 3776 | 594 |
| 1997 | 3843 | 631 |
| 1998 | 3760 | 540 |
| 1999 | 3906 | 599 |
| 2000 | 4148 | 757 |
| 2001 | 4279 | 745 |
| 2002 | 4404 | 735 |
| 2003 | 4540 | 749 |
| 2004 | 4781 | 773 |
| 2005 | 4836 | 789 |
| 2006 | 4884 | 744 |

Требуется построить математическую модель, отражающую зависимость объема производства от величины инвестиций с распределенным лагом на величину 3 года и сделать прогноз по этой модели среднего объема производства на 2007 год при объеме инвестиций в 800 тыс. руб.

**Рекомендуемая литература (основная)**

1. Колемаев В.А. Эконометрика (учебник). М.,ИНФРА-М, 2006.
2. Эконометрика (учебник) Под редакцией члена-корреспондента РАН И.И. Елисеевой. М., «Финансы и статистика», 2004.
3. Практикум по эконометрике. Под редакцией И.И.Елисеевой. М:, «Финансы и статистика», 2004.
4. Нефедов Ю.В., Базаров М.К. Математические методы в обосновании управленческих решений (Математические модели в управлении): Монография. – Оренбург: Изд-во ООИПКРО, 2005 – 372 стр.

**Рекомендуемая литература (дополнительная)**

1. Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. М., Статистика, 1974.
2. Кильдишев Г.С., Френкель А.А. Анализ временных рядов и прогнозирование. М., «Статистика», 1973.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1997.
4. Юзбашев М.М., Манелля А.И. Статистический анализ тенденций и колеблимости. М., «Финасы и статистика», 1983.
5. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование. М., «Финансы и статистика», 2001.

Общие методические указания

К выполнению контрольной работы следует приступать только после изучения всех тем курса по учебнику. При этом следует руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольную работу следует оформлять на стандартных листах бумаги формата А4. На обложке должны быть указаны фамилия и инициала студента, полный шифр зачетной книжки, название контрольной работы, и дата. Теоретический материал должен быть изложен кратко и четко, при необходимости со ссылкой на использованную литературу. При решении задач, необходимо выделять математическую модель задачи, формулы и справочный материал с указанием источника. Графики необходимо оформлять аккуратно и четко с указанием единиц измерения, масштаба координатных осей и других элементов графика. Объяснения должны соответствовать тем обозначениям, которые даны на графике. Желательно оформление текста и графиков на компьютере.

2. Контрольную работу студент должен выполнять самостоятельно.

3. В период сессии студент представляет прорецензированную контрольную работу для очной устной защиты.

**Предмет, цели и задачи эконометрики**

Любое прикладное научное исследование ставит своей целью по­лучить недостающие знания для решения актуальной проблемы общест­венной жизни. Всякое управленческое решение направлено на решение реальной проблемы. Проблему следует рассматривать как противоречие, которое невозможно устранить известными способами и средствами.

Определить проблему, это значит, четко обозначит суть противоречия (препятствия), мешающего достичь поставленной цели управления.

Конкретность цели выражается в ее ясности и в возможности количественной оценки уровня ее достижения.

Методической основой достижения поставленной цели управления является общая методика познания окружающего нас мира, кото­рая предполагает три основных этапа: наблюдение за объектом управления, создание абстрактного представления об интересующих нас его свойствах (формулировка нового знания об объекте) и про­верка полученных представлений на практике.

По существу моделирование представляет собой процесс получения новых знаний об объекте управления, процесс познания, в котором можно

выделить все три указанных основных этапа.

В курсе даются основы эконометрического анализа, которые сопровождаются рассмотревшем примеров. Основным полем анализа является макроэкономическая теория и практика анализа и прогнозирования.

Курс базируется на оценивании и анализе парных и множественных регрессий с помощью метода наименьших квадратов. Рассматриваются такие проблемы эконометрического анализа, как выбор правильной формы модели, автокорреляция остатков, влияние ошибок измерения, системы одновременных уравнений. Рассматриваемые методы применяются к оцениванию и анализу таких моделей, как функции потребления, инвестиционные функции, производственные функции, функции спроса и предложения.

Курс опирается на знание студентами основ математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики.

**Целью курса** является выработка у обучаемых навыков использования подходов и методов эконометрического исследования экономических процессов.

В результате изучения дисциплины студент *должен знать* методологию эмпирического изучения связей.

**Математическое моделирование - основной этап в решении проблемы.**

Модель это конс­трукция, отражающая некоторые (интересующие нас) свойства объекта управления.

Математическая модель представляет собой математическую конструкцию в виде уравнения, системы уравнений или логических заключений.

Модель всегда приближенно отражает свойства объекта управления. Обеспечить достаточную точность модели, это значит учесть при ее построении все существенные свойства и связи объекта управления, отвлекаясь от второстепенных, несущественных свойств.

По существу математическое моделирование представляет собой второй этап процесса познания - создание абстрактного представле­ния об интересующих нас свойствах объекта управления и матема­тическая модель является отражением этих свойств.

**Основные этапы построения математической модели**

Математическая модель класса "Вход - Выход" строится на основе результатов наблюдения за объектом управления в форме

 ,

где  - показатель качества функционирования объекта управления (параметр оптимизации);

 - факторы, оказывающие существенное влияние на показатель качества функционирования объекта управления;

 - число факторов, включенных в математическую модель.

Общих способов построения математических моделей не сущест­вует. При построении математической модели приходится иметь дело с противоречивыми требованиями: с одной стороны модель должна как можно полнее отражать интересующие нас свойства объекта исследо­вания, с другой стороны она должна быть по возможности простой и понятной, возможно хорошо интерпретируемой и не противоречащей основным представлениям в исследуемой предметной области. То есть, математическая модель, оставаясь адекватной (адекватный - [при­равненный] - равный, вполне соответствующий, тождественный) объ­екту управления, должна быть предельно простой.

Роль и место математического моделирования в решении пробле­мы отражены в примерном плане, включающем следующие этапы:

1. На основе формулировки цели выбрать (определить) объект управления используя системный подход.

2. Выбрать показатели, характеризующие степень, достижения цели функционирования объекта управления. Эти показатели по возможности должны давать количественную оценку качества функцио­нирования объекта управления.

3. Выбрать и оценить факторы, влияющие на показатели качества функционирования объекта управления.

4. Построить математическую модель, отражающую влияние выб­ранных факторов на показатели качества.

5. Проверить адекватность математической модели, то есть соответствие геометрического образа математической модели геометрическому образу той зависимости, той закономерности поведения объекта управления, которая отражена в модели.

6. Оценить точность математической модели (оценить ошибку прогнозирования по модели).

7. Разработать алгоритм, поиска оптимальных условий функцио­нирования объекта управления.

8. Определить, при необходимости используя компьютер, опти­мальные значения факторов, то есть значения, при которых объект управления функционирует лучшим образом.

9. Разработать управленческое решение.

10. Проверить результаты реализации решения на практике и дать им оценку.

РЕГРЕССИОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

**Пример** моделирования спроса.

Для моделирования зависимости уровня спроса на некоторые изделия от уровня розничной цены были обследованы шесть регионов. Уровень спроса  измеряли количеством проданных изделий, в течение года в расчёте на тысячу жителей. Розничную цену одного изделия  измеряли в тыс. руб. Результаты обследования и расчеты представлены в таблице 2.

 Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 10 | 30 | 100 | 900 | 300 | 45,79 | 15,79 | 249,31 |
| 2 | 15 | 15 | 225 | 225 | 225 | 14,55 | -0,45 | 0,20 |
| 3 | 7 | 56 | 49 | 3136 | 392 | 64,53 | 8,53 | 72,84 |
| 4 | 12 | 20 | 144 | 400 | 240 | 33,29 | 13,29 | 176,71 |
| 5 | 5 | 100 | 25 | 10000 | 500 | 77,03 | -22,97 | 527,58 |
| 6 | 18 | 10 | 324 | 100 | 180 | -4,20 | -14,20 | 201,54 |
| ∑ | 67 | 231 | 867 | 14761 | 1837 | 231,00 | 75,23 | 1228,18 |
| Сред-нее | 11 | 39 | 145 | 2460 | 306 | 38,50 | 12,54 | 204,7 |

Требуется построить математическую модель, отражающую влияние розничной цены на уровень спроса.

**Решение.** На первом этапе определим коэффициент корреляции между спросом  и уровнем цены .

Средние квадратические отклонения

 

 

Коэффициент корреляции

 

Проверим гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции. Для этого определим среднее квадратическое отклонение коэффициента корреляции

 

В качестве критерия используем критерий Стьюдента

 

Критическое значение критерия Стьюдента находим для 5-процентного уровня значимости и числа степеней свободы  равно .

Так как наблюдаемое значение критерия больше критического, то нет оснований, принять основную гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции, то есть коэффициент корреляции статистически значимо отличается от нуля. На этом основании следует считать, что зависимость спроса от уровня цен в области данных наблюдений является линейной и может быть описана уравнением прямой вида.

Вычислим коэффициенты регрессии и  методом наименьших квадратов и их средние квадратические отклонения.

Чтобы методом наименьших квадратов найти выборочные коэффициенты , необходимо минимизировать сумму квадратов отклонений результатов наблюдений от результатов расчета по модели, то есть из условия: 

 где  - число наблюдений.

Приравнивая нулю частные производные от этой суммы квадратов отклонений, взятые по неизвестным коэффициентам , получим систему так называемых нормальных уравнений:

 

или

 ,

решая которую, получим коэффициенты регрессии.

Так как выборочные коэффициенты определяются по случайной выборке, то они являются случайными величинами, вариация которых оценивается средним квадратическим отклонением .

Для однофакторной модели вида  коэффициенты  и средние квадратические отклонения  и  определяются по формулам: ; ; 

где:  - среднее произведение  на ;

 - произведение средних;  - средний квадрат ;

 - квадрат среднего значения ;  - дисперсия фактора ;

 

 - исправленная остаточная дисперсия;



 - число определяемых выборочных коэффициентов в математической модели (для однофакторной модели );

 - число степеней свободы;

- остаточная дисперсия;

 - наблюдаемое (фактическое) значение параметра оптимизации в - ом наблюдении (опыте);

 - рассчитанное по модели значение параметра оптимизации для условий -ого наблюдения.



 

или

 

Общая дисперсия спроса равна

 

или

 

Остаточная дисперсия

 

Исправленная общая дисперсия

 

Исправленная остаточная дисперсия

 

 – число, определяемых выборочных коэффициентов в математической модели (для однофакторной модели L = 2);

  - число степеней свободы;

- остаточная дисперсия;

 - наблюдаемое (фактическое) значение параметра оптимизации в - ом наблюдении (опыте);

 - рассчитанное значение параметра оптимизации для условий -ого наблюдения.

Тогда

 

Проверим гипотезу о равенстве нулю коэффициентов регрессии

 

Критическое значение критерия Стьюдента для уровня значимости  и числа степеней свободы  находим из таблицы двусторонних критических значений , то есть критические значения меньше наблюдаемых значений. Следовательно, нет оснований, считать коэффициенты регрессии равными нулю, то есть они статистически значимо отличаются от нуля.

Таким образом, линейная математическая модель имеет вид

 

В данной модели коэффициент 108,272 характеризует средний спрос при нулевой цене. Угловой коэффициент уравнения прямой (коэффициент регрессии при переменной ) показывает, насколько единиц изменится зависимая величина , при изменении на единицу фактора . В условиях нашей задачи следует ожидать, что при увеличении уровня цены на одну тыс. руб. уровень спроса уменьшится на 6,248 изделий в год на тысячу жителей.

На рис.1 представлены результаты наблюдения и расчета по линейной модели тренда.

Рис. 1. Корреляционное поле и график линейной модели тренда

Для полученной модели рассчитаем среднюю абсолютную ошибку аппроксимации =12,54 и, соответственно, относительная погрешность модели .

Определим коэффициент детерминации

 

Коэффициент детерминации равен 79%, то есть примерно на 79% математическая модель объясняет вариацию спроса изменениями цены.

**Рассчитаем средний коэффициент эластичности.**

 Эластичностью функции  в точке  называется предел отношения относительного приращения функции к относительному приращению аргумента, то есть  Можно сказать, что эластичность функции есть относительная производная.

Часто  называют коэффициентом эластичности. После некоторых преобразований, получим



То есть, окончательно , для любого из области определения функции .

Исходя из определения коэффициента эластичности, его численное значение (с учетом знака) показывает, на сколько процентов изменится функция при увеличении аргумента на один процент.

Следовательно, средний коэффициент эластичности определим по формуле

, то есть при увеличении розничной цены выше средней на 1% спрос уменьшится на 1,76%.

**Оценка ошибки прогнозирования по модели**

Математическая модель позволяет производить прогноз внутри области эксперимента, то есть модель является интерполяционной. Попытка экстраполировать за пределы эксперимента может привести к существенным ошибкам.

Средняя ошибка регрессионной линейной модели (оценка среднего значения результативного показателя параметра оптимизации при конкретных значениях факторов) рассчитывается по формуле:

 

где:  - число факторов;

- число наблюдений;

 - исправленная выборочная остаточная дисперсия;

- среднее значение  - го фактора;

 - выборочная дисперсия  - го фактора.

Для прогнозирования индивидуальных значений параметра оптимизации доверительный интервал определяется следующим неравенством: ,

где .

Минимальная ошибка модели в центре области эксперимента (в центре области наблюдений), то есть когда , равна . Чем дальше от центра области наблюдений точка, в которой производится прогноз, тем больше ошибка прогнозирования.

Сделаем прогноз для

 .

Точечный прогноз

 .

Наиболее вероятная ошибка

 , то есть для надежности  или  и 



или , то есть .

Точность данного прогноза не приемлема.

Проверим гипотезу об адекватности, полученной математической модели по критерию Фишера.

Вычислим наблюдаемое значение критерия Фишера . Затем, из таблицы критических точек распределения Фишера для уровня значимости  и числа степеней свободы для общей (верхней) дисперсии , и числа степеней свободы для остаточной (нижней) дисперсии , находим критическое значение .

Так как наблюдаемое значение  меньше критического

, то гипотеза об адекватности математической модели отвергается. Так как общая дисперсия статистически незначимо превосходит остаточную, то гипотеза об адекватности отвергается, рискуя при этом с вероятностью 0,05 совершить ошибку первого рода, то есть отвергнуть заведомо справедливую гипотезу об адекватности.

Следовательно, необходимо изменить форму математической модели так, чтобы ее геометрический образ соответствовал геометрическому образу зависимости спроса от цены, которую с достаточной точностью должна отражать математическая модель. Это может быть степенная функция вида . Данная форма зависимости не противоречит здравому смыслу, и хорошо интерпретируется при , то есть с ростом цены спрос будет уменьшаться, асимптотически приближаясь к нулю. Параметр при этом представляет собой коэффициент эластичности спроса относительно розничной цены.

Для подбора коэффициентов  и , произведем линеаризацию, прологарифмировав левую и правую части модели. В результате получим: . Таким образом, если в выборке наблюдений заменить спрос и цену на их логарифмы, то коэффициент и можно подобрать методом наименьших квадратов. В таблице 6.3 представлены результаты этих преобразований и расчеты, необходимые для расчета коэффициентов.

 Таблица 6.3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 10 | 30 | 2,3 | 3,4 | 29,26 | 0,554 |
| 2 | 15 | 15 | 2,7 | 2,7 | 14,18 | 0,670 |
| 3 | 7 | 56 | 1,9 | 4,0 | 55,32 | 0,465 |
| 4 | 12 | 20 | 2,5 | 3,0 | 21,12 | 1,256 |
| 5 | 5 | 100 | 1,6 | 4,6 | 100,89 | 0,794 |
| 6 | 18 | 10 | 2,9 | 2,3 | 10,24 | 0,058 |
| Ср | 11 | 38,5 | 2,3 | 3,3 | 38,5 | 0,634 |

Коэффициенты определим по следующим формулам:

.

Коэффициент , а , тогда коэффициент  получаем путем потенцирования, то есть 

Следовательно, математическая модель примет вид:  (рис 6.2).

Рис. 2. Корреляционное поле и график степенной модели тренда

Коэффициент корреляции между результатами прогнозирования по тренду, описываемому данной моделью, и результатами наблюдаемого спроса равен примерно 1.

Проверим гипотезу об адекватности, полученной математической модели по критерию Фишера.

Определим исправленную выборочную остаточную дисперсию

 ,

Вычислим наблюдаемое значение критерия Фишера . Затем, из таблицы критических точек распределения Фишера для уровня значимости  и числа степеней свободы для общей (верхней) дисперсии , и числа степеней свободы для остаточной (нижней) дисперсии , находим критическое значение .

Так как наблюдаемое значение  больше критического

, то гипотеза об адекватности математической модели принимается. То есть, так как общая дисперсия статистически значимо превосходит остаточную, то гипотеза об адекватности принимается.

В заключение определим коэффициент детерминации

 

Построенная математическая модель на 100 процентов объясняет вариацию спроса изменением уровня цены.

Точечный прогноз по полученной модели для  будет



Интервальный прогноз

или .

**Временной ряд**

**Временной ряд –** последовательность чисел, значения которых представляют изменение некоторого изучаемого признака во времени или в пространстве.Если одновременно регистрируется несколько показателей процесса, то говорят о многомерных временных рядах. Если измерения производятся непрерывно, говорят о временных рядах с непрерывным временем, или о случайных процессах. Часто измерение изучаемого процесса производится через равные промежутки времени.

Примером временного ряда может служить ежесуточное изменение спроса на товар и цен на рынке, температуры воздуха, курса акций и так далее.

При практическом изучении временных рядов ставится задача моделирования динамики развития процесса на основании наблюдаемого отрезка времени конечной длины с целью прогнозирования (экстраполяции) на заданную глубину. Наблюдаемые изменения изучаемого показателя временного ряда при его анализе разделяют на закономерную (детерминированную) и случайную составляющие.

В коммерческой практике в детерминированной составляющей обычно выделяют три компоненты: тренд – *Tt* , сезонную -  и случайную -  компоненты.

**Трендом временного ряда** при , называют плавно изменяющуюся нециклическую компоненту, описывающую чистое влияние долговременных факторов, эффект которых сказывается постепенно. Тренд отражает тенденцию временного ряда (процесса).

В коммерческой практике известно, что под влиянием долговременных факторов, таких, как уровень материального благосостояния, уровень урбанизации и так далее, формируются определённые тенденции в уровне спроса вообще и его структурных составляющих, в частности.

Действие этих и им подобных факторов происходит постепенно, поэтому их вклад в развитие процесса описывают с помощью гладких криволинейных зависимостей.

**Сезонная компонента** временного ряда при  описывает поведение, изменяющееся регулярно в течение заданного периода (года, месяца, дня и т.п.). Она состоит из последовательности почти повторяющихся циклов.

Сезонные эффекты присущи многим сферам человеческой активности. Так, характер спроса связан с характером формирования дохода граждан (периоды выплаты заработной платы), со временем года. Например, спрос в летний период на овощные консервы уменьшается, так как повышается предложение на рынке свежих овощей.

Главная идея подхода к анализу сезонных компонент заключается в переходе от сравнения всех значений временного ряда между собой, к сравнению значений через определённые промежутки времени. Так, при изучении динамики месячного спроса за несколько лет, данные января одного года сравниваются с данными января предыдущего года, а не с данными других месяцев рассматриваемого года.

Таким образом, математическая модель предполагает, что каждый уровень временного ря­да может быть представлен как сумма трендовой (*T*), сезонной *(S)* и случайной *(Е)* компонент. Общий вид мультипликативной мо­дели выглядит так: *Y=T\*S\*E,* а общий вид аддитивной модели имеет вид *Y=T+S+E.*

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как произведение или, соответственно, сумма трендовой (*T*), сезонной *(S)* и случайной *(Е)* компонент. Выбор одной из двух моделей осуществляется на основе анализа структуры сезонных колебаний. Если амплитуда колебаний приблизительно постоян­на, строят аддитивную модель временного ряда, в которой значе­ния сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов. Если амплитуда сезонных колебаний возрас­тает или уменьшается, строят мультипликативную модель вре­менного ряда, которая ставит уровни ряда в зависимость от зна­чений сезонной компоненты.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сво­дится к расчету значений *T,* *S* и *E* для каждого уровня ряда.

*Процесс построения модели включает в себя следующие шаги.*

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей
средней.

1. Расчет значений сезонной компоненты *S.*
2. Устранение сезонной компоненты из исходных уровней
ряда и получение выровненных данных (*T*+ *Е)* в аддитивной или
*(Т\*Е)* в мультипликативной модели.
3. Аналитическое выравнивание уровней *(Т+Е)* или *(Т\*Е)* ирасчет значений *Т,* с использованием полученного уравнения
тренда.
4. Расчет полученных по модели значений (*T+S*) или *(Т\*S).*
5. Расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

Если полученные значения ошибок не содержат автокорреля­ции, ими можно заменить исходные уровни ряда и в дальнейшем использовать временной ряд ошибок *Е* дляанализа взаимосвязи исходного ряда и других временных рядов.

Подробнее методику построения каждой из моделей рассмо­трим на примерах.

**Пример.** *Построение аддитивной модели временного ряда.*

Обратимся к данным об объеме потребления электроэнер­гии жителями района за последние четыре года, представлен­ным в табл. 1.

Рассчитаем ее компоненты.

**Шаг 1.** Проведем выравнивание исходных уровней ряда мето­дом скользящей средней. Для этого:

1. просуммируем уровни ряда последовательно за каждые четыре
квартала со сдвигом на один момент времени и определим
условные годовые объемы потребления электроэнергии;
2. разделив полученные суммы на 4, найдем скользящие средние. Отметим, что полученные таким образом вы­ровненные значения уже не содержат сезонной компоненты;
3. приведем эти значения в соответствие с фактическими моментами времени, для чего найдем средние значения из двух
последовательных скользящих средних - центрированные
скользящие средние.

Таблица 1. Расчет оценок сезонной компоненты в аддитивной модели потребления электроэнергии жителями региона, млн кВт \* ч

 Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № квар-тала, t | Потреб-ление элек-троэнергии***, Y*** | Итого за четыре квартала | Скользящая средняя за четыре квартала | Центрирован-ная скользящая средняя | Оценка сезонной компа-ненты |
| 1 | 6,0 |  |  |  |  |
| 2 | 4,4 | 24,4 | 6,10 |  |  |
| 3 | 5,0 | 25,6 | 6,40 | 6,250 | -1,250 |
| 4 | 9,0 | 26,0 | 6,50 | 6,450 | 2,550 |
| 5 | 7,2 | 27,0 | 6,75 | 6,625 | 0,575 |
| 6 | 4,8 | 28,0 | 7,00 | 6,875 | -2,075 |
| 7 | 6,0 | 28,8 | 7,20 | 7,100 | -1,100 |
| 8 | 10,0 | 29,6 | 7,40 | 7,300 | 2,700 |
| 9 | 8,0 | 30,0 | 7,50 | 7,450 | 0,550 |
| 10 | 5,6 | 31,0 | 7,75 | 7,625 | -2,025 |
| 11 | 6,4 | 32,0 | 8,00 | 7,875 | -1,475 |
| 12 | 11,0 | 33,0 | 8,25 | 8,125 | 2,875 |
| 13 | 9,0 | 33,6 | 8,40 | 8,325 | 0,675 |
| 14 | 6,6 | 33,4 | 8,35 | 8,375 | -1,775 |
| 15 | 7,0 |  |  |  |  |
| 16 | 10,8 |  |  |  |  |

В примере видно, что данный временной ряд со­держит сезонные колебания периодичностью 4. Объемы потреб­ления электроэнергии в осенне-зимний период времени (I и IV кварталы) выше, чем весной и летом (II и III кварталы).

По гра­фику этого ряда (рис 1) можно установить наличие приблизи­тельно равной амплитуды колебаний. Это свидетельствует о воз­можном существовании в ряде аддитивной модели.

**Шаг 2.** Найдем оценки сезонной компоненты как разность между фактическими уровнями ряда и центрированными сколь­зящими средними (последняя графа табл. 1). Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты *S* (табл. 2). Для этого найдем средние за каждый квартал (по всем годам) оценки сезон­ной компоненты *Si.* В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимно пога­шаются. В аддитивной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна нулю.

Таблица 2. Расчет значений сезонной компоненты в аддитивной модели

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Показатели | Год | № квартала, i |
|  | I | II | III | IV |
|  | 1 23 4 | -0,575 0,550 0,675 |  --2,075 -2,025 -1,775 | -1,250 -1,100 -1,475 - | 2,550 2,700 2,875- |
| Итого за i-й квартал (за все годы) |  | 1,800 | -5,875 | -3,825 |  8,125 |
| Средняя оценка сезон­ной компоненты для i-го квартала, *S* |  | 0,600 | -1,958 | -1,275 | 2,708 |
| Скорректированная се­зонная компонента, *S(* |  | 0,581 | -1,977 | -1,294 | 2,690 |

Для данной модели имеем: 0,6-1,958-1,275 + 2,708 = 0,075.

Определим корректирующий коэффициент: *к* = 0,075 /4 = 0,01875.

Рассчитаем скорректированные значения сезонной компо­ненты как разность между ее средней оценкой и корректирую­щим коэффициентом *к: ,* где i=1:4.

Проверим условие равенства нулю суммы значений сезонной компоненты:

0,581 - 1,977 - 1,294 + 2,690 = 0.

Таким образом, получены следующие значения сезонной компоненты: I квартал: *S1 =* 0,581;

 II квартал: S2= -1,977;

 III квартал: *S3=* -1,294;

 IV квартал: 54= 2,690.

Занесем полученные значения в табл. 2 для соответствую­щих кварталов каждого года.

**Шаг 3.** Элиминируем влияние сезонной компоненты, вычи­тая ее значение из каждого уровня исходного временного ряда. Получим величины *Т+ Е = Y— S*. Эти значения рассчитываются за каждый момент времени и содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 3. **Расчет выровненных значений *Т* и ошибок *Е***

**в аддитивной модели**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   |  |   |  |   |  |

|  |
| --- |
|   |

 |  |
| 1 | *2* | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 6 | 0,581 | 5,419 | 5,5926 | 6,1736 | -0,174 | 0,030137 |
| 2 | 4,4 | -1,977 | 6,337 | 5,8202 | 3,8432 | 0,5568 | 0,3100262 |
| 3 | 5 | -1,294 | 6,294 | 6,0478 | 4,7538 | 0,2462 | 0,0606144 |
| 4 | 9 | 2,69 | 6,31 | 6,2754 | 8,9654 | 0,0346 | 0,0011972 |
| 5 | 7,2 | 0,581 | 6,619 | 6,503 | 7,084 | 0,116 | 0,013456 |
| 6 | 4,8 | -1,977 | 6,777 | 6,7306 | 4,7536 | 0,0464 | 0,002153 |
| 7 | 6 | -1,294 | 7,294 | 6,9582 | 5,6642 | 0,3358 | 0,1127616 |
| 8 | 10 | 2,69 | 7,31 | 7,1858 | 9,8758 | 0,1242 | 0,0154256 |
| 9 | 8 | 0,581 | 7,419 | 7,4134 | 7,9944 | 0,0056 | 3,136E-05 |
| 10 | 5,6 | -1,977 | 7,577 | 7,641 | 5,664 | -0,064 | 0,004096 |
| 11 | 6,4 | -1,294 | 7,694 | 7,8686 | 6,5746 | -0,175 | 0,0304852 |
| 12 | 11 | 2,69 | 8,31 | 8,0962 | 10,7862 | 0,2138 | 0,0457104 |
| 13 | 9 | 0,581 | 8,419 | 8,3238 | 8,9048 | 0,0952 | 0,009063 |
| 14 | 6,6 | -1,977 | 8,577 | 8,5514 | 6,5744 | 0,0256 | 0,0006554 |
| 15 | 7 | -1,294 | 8,294 | 8,779 | 7,485 | -0,485 | 0,235225 |
| 16 | 10,8 | 2,69 | 8,11 | 9,0066 | 11,6966 | -0,897 | 0,8038916 |

**Шаг 4**. Определим компоненту *Т* данной модели. Для этого проведем аналитическое выравнивание ряда (*T*+ *Е)* с помощью линейного тренда. Результаты аналитического выравнивания следующие:

Константа (начальная ордината) 5,7065

Коэффициент регрессии 0,1872

Стандартная ошибка коэффициента регрессии 0,015188

R-квадрат 0,914971

Число наблюдений 15

Таким образом, имеем следующий линейный тренд:

*T* = 5,7065 + 0,1872 *•t*.

Подставляя в это уравнение значения t = 1, ..., 16, найдем уровни *Т* для каждого момента времени. График уравнения тренда приведен на рис. 1.



Рис 1. Потребление электроэнергии жителями региона (фактические, выровненные по адаптивной модели значения уровней ряда)

**Шаг 5**. Найдем значения уровней ряда, полученные по адди­тивной модели. Для этого прибавим к уровням *Т* значения сезон­ной компоненты для соответствующих кварталов. Графически

значения (*T*+ *S)* представлены на рис. 1.

 **Шаг 6**. В соответствии с методикой построения аддитивной модели расчет ошибки производится по формуле

 *E=Y-(T + S).*

Это абсолютная ошибка. Численные значения абсолютных ошибок приведены в таблице 3.

По аналогии с моделью регрессии для оценки качества пост­роения модели или для выбора наилучшей модели можно приме­нять сумму квадратов полученных абсолютных ошибок. Для дан­ной аддитивной модели сумма квадратов абсолютных ошибок равна 1,0984 или средняя абсолютная ошибка равна 0,06865. По отношению к среднему квадрату отклонений уровней ряда от его среднего уровня, равной 4,773 эта величина составляет чуть более 1,44%:

Kd = [1-(0,06865/4,773)]\*100=98,56%.

Следовательно, можно сказать, что аддитивная модель объяс­няет 98,56% общей вариации уровней временного ряда потребле­ния электроэнергии за последние 16 кварталов.

Таким образом, прогнозирование интервальной оценки потребления электроэнергии производится по следующей модели

 

где:  – фактическое значение прогнозируемого спроса;

  – номер квартала, на который производится прогноз (отсчёт начинается с 1-го квартала выборки);

 – номер квартала ();

- скорректированная сезонная компонента для  - го квартала;

 – предельная ошибка прогнозирования (доверительный интервал) ;

– критическое значение критерия Стьюдента, взятое из таблицы для числа степеней свободы  и уровня значимости , то есть для 95-процентной надежности ;

 – среднее квадратическое отклонение результатов расчет по математической модели, учитывающей сезонные индексы, от фактических результатов наблюдения.

В таблице 4 представлены результаты прогнозирования поквартального потребления электроэнергии в регионе на 16, 17, 18 и 19 кварталы от начала наблюдения, рассчитанные по тренду с учетом сезонных компонент с надежностью 95%.

 Таблица 4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер квартала | Минимальное значение | Точечный прогноз | Максимальное значение |
| 17 | 9,476 | 10,000 | 10,524 |
| 18 | 6,582 | 7,106 | 7,630 |
| 19 | 7,453 | 7,977 | 8,101 |
| 20 | 11,625 | 12,1485 | 12,672 |

***Автокорреляционная функция и выявление струк­туры ряда***

Пусть имеются условные данные об объемах потребления электроэнергии жителями региона за 16 кварталов (табл. 5).

Таблица 5. Потребление электроэнергии жителями региона, млн кВт \* ч и теже данные, представленные с лагом

в i кварталов

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № квар-тала, t |  ***Yt*** | Yt-1 | Yt-2 | Yt-3 | Yt-4 |
| 1 | 6,0 |   |  |  |  |
| 2 | 4,4 | 6,0 | \_ | \_ | \_ |
| 3 | 5,0 | 4,4 | 6,0 | \_ | \_ |
| 4 | 9,0 | 5,0 | 4,4 | 6,0 | \_ |
| 5 | 7,2 | 9,0 | 5,0 | 4,4 | 6,0 |
| 6 | 4,8 | 7,2 | 9,0 | 5,0 | 4,4 |
| 7 | 6,0 | 4,8 | 7,2 | 9,0 | 5,0 |
| 8 | 10,0 | 6,0 | 4,8 | 7,2 | 9,0 |
| 9 | 8,0 | 10,0 | 6,0 | 4,8 | 7,2 |
| 10 | 5,6 | 8,0 | 10,0 | 6,0 | 4,8 |
| И | 6,4 | 5,6 | 8,0 | 10,0 | 6,0 |
| 12 | 11,0 | 6,4 | 5,6 | 8,0 | 10,0 |
| 13 | 9,0 | 11,0 | 6,4 | 5,6 | 8,0 . |
| 14 | 6,6 | 9,0 | 11,0 | 6,4 | 5,6 |
| 15 | 7,0 | 6,6 | 9,0 | 11,0 | 6,4 |
| 16 | 10,8 | 7,0 | 6,6 | 9,0 | 11,0 |

Определим коэффициент автокорреляции первого порядка (добавим *yi* в табл. 6 и воспользуемся формулой расчета ли­нейного коэффициента корреляции). Он составит: г1, = 0,165. От­метим, что расчет этого коэффициента производился по 15, а не по 16 парам наблюдений. Это значение свидетельствует о слабой зависимости текущих уровней ряда от непосредственно им пред­шествующих уровней.

Рассчитав коэффициент авто­корреляции второго порядка г2, получим количественную харак­теристику корреляционной связи рядов *yt и yt-2:* г2=0,567. Продол­жив расчеты аналогичным образом, получим автокорреляцион­ную функцию этого ряда. Ее значения приведе­ны в табл. 6 и на графике рис 2.

 Таблица 6

|  |  |
| --- | --- |
| Лаг | Коэффициент автокорреляции уровней |
|
| 1 | 0,165154 |
| 2 | 0,566873 |
| 3 | 0,113558 |
| 4 | 0,983025 |
| 5 | 0,118711 |
| 6 | 0,722046 |
| 7 | 0,003367 |
| 8 | 0,973848 |

 

Рис 2. Автокорреляционная функция, характеризующая внутреннюю структуру потребления электроэнергии в регионе.

Анализ значений автокорреляционной функции позволяет сделать вывод о наличии в изучаемом временном ряде*,* сезонных колебаний периодич­ностью в четыре квартала. Данный вывод подтверждается и гра­фическим анализом структуры ряда (см. рис. 1).

Аналогично, если, например, при анализе временного ряда наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции уров­ней второго порядка, ряд содержит циклические колебания в два периода времени, т. е. имеет **пилообразную структуру.**

**Построение модели с распределенным лагом.**

В табл. 7 представлены данные о динамике выручки от продажи товаров (Y, тыс. руб.) в зависимости от бюджета на рекламу (Х, тыс. сруб.) за последние 20 месяцев. Сделать прогноз выручки на 21 месяц при затратах на рекламу на уровне 70 тыс. руб.

Построим модель с распределенным лагом для L = 3 в предпо­ложении, что структура лага описывается полиномом первой сте­пени. Общий вид этой модели:

 **

Для полинома первой степени имеем: *.*

Для расчета параметров этой модели необходимо провести преобразование исходных данных в новые переменные **

Это преобразование в соответствии с (7.14) выглядит следую­щим образом:

 **

  **

 Таблица 7

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № месяца | ***Выручка У*** | ***Затраты на рекламу X*** | Z0 | Z1 |
| 1 | 1931,3 | 29,6 |   |   |
| 2 | 1973,2 | 29,1 |   |   |
| 3 | 2025,6 | 28,9 |   |   |
| 4 | 2129,8 | 32,1 | 119,7 | 175,9 |
| 5 | 2218 | 34,3 | 124,4 | 177,2 |
| 6 | 2343,3 | 37,1 | 132,4 | 185,2 |
| 7 | 2473,5 | 41,2 | 144,7 | 202 |
| 8 | 2622,3 | 43,8 | 156,4 | 218,3 |
| 9 | 2690,3 | 41,8 | 163,9 | 237,5 |
| 10 | 2801 | 44 | 170,8 | 253 |
| 11 | 2877,1 | 46,1 | 175,7 | 259 |
| 12 | 2875,8 | 42,9 | 174,8 | 259,5 |
| 13 | 2965,1 | 48,1 | 181,1 | 267,1 |
| 14 | 3107,1 | 53,2 | 190,3 | 272,2 |
| 15 | 3268,5 | 59,6 | 203,8 | 278,1 |
| 16 | 3248,1 | 54,4 | 215,3 | 310,3 |
| 17 | 3221,7 | 43,7 | 210,9 | 333,2 |
| 18 | 3380,8 | 52 | 209,7 | 331,3 |
| 19 | 3533,2 | 60 | 210,1 | 302,6 |
| 20 | 3703,5 | 66,4 | 222,1 | 295,1 |

Значения переменных ** приводятся в табл. 7. Отме­тим, что число наблюдений, по которым производился расчет этих переменных, составило 17 (три наблюдения было поте­ряно вследствие сдвига факторного признака **на три месяца времени).

Расчет параметров уравнения регрессии обычным МНК для нашего примера приводит к следующим результатам:

 

В скобках указаны значения стандартных ошибок коэффици­ентов регрессии. Воспользовавшись найденными коэффициен­тами регрессии при переменных ** и соотношениями (7.11), рассчитаем коэффициенты регрессии исходной модели:

**

**

**

**

При этом **

Модель с распределенным лагом имеет вид:



|  |
| --- |
| Результаты наблюдений зависимости выручки от размера бюджета на рекламу и результаты расчета по математической модели с распределенным лагом |
|  |  |  |  |  | Для модели с распределенным лагом |
| № месяца | ***Выручка У*** | ***Затраты на рекламу X*** | Z0 | Z1 | Yp | Y-Yp | (Y-Yp)^2 |
| 1 | 1931,3 | 29,6 |   |   |   |   |   |
| 2 | 1973,2 | 29,1 |   |   |   |   |   |
| 3 | 2025,6 | 28,9 |   |   |   |   |   |
| 4 | 2129,8 | 32,1 | 119,7 | 175,9 | 2116,2 | 13,6 | 184,1 |
| 5 | 2218 | 34,3 | 124,4 | 177,2 | 2198,0 | 20,0 | 400,1 |
| 6 | 2343,3 | 37,1 | 132,4 | 185,2 | 2319,2 | 24,1 | 581,1 |
| 7 | 2473,5 | 41,2 | 144,7 | 202 | 2491,6 | -18,1 | 326,0 |
| 8 | 2622,3 | 43,8 | 156,4 | 218,3 | 2654,5 | -32,2 | 1037,9 |
| 9 | 2690,3 | 41,8 | 163,9 | 237,5 | 2731,8 | -41,5 | 1721,7 |
| 10 | 2801 | 44 | 170,8 | 253 | 2809,6 | -8,6 | 74,1 |
| 11 | 2877,1 | 46,1 | 175,7 | 259 | 2880,4 | -3,3 | 11,1 |
| 12 | 2875,8 | 42,9 | 174,8 | 259,5 | 2862,4 | 13,4 | 178,4 |
| 13 | 2965,1 | 48,1 | 181,1 | 267,1 | 2953,8 | 11,3 | 126,6 |
| 14 | 3107,1 | 53,2 | 190,3 | 272,2 | 3106,0 | 1,1 | 1,3 |
| 15 | 3268,5 | 59,6 | 203,8 | 278,1 | 3334,1 | -65,6 | 4301,7 |
| 16 | 3248,1 | 54,4 | 215,3 | 310,3 | 3444,0 | -195,9 | 38378,9 |
| 17 | 3221,7 | 43,7 | 210,9 | 333,2 | 3292,5 | -70,8 | 5018,6 |
| 18 | 3380,8 | 52 | 209,7 | 331,3 | 3276,5 | 104,3 | 10870,8 |
| 19 | 3533,2 | 60 | 210,1 | 302,6 | 3373,0 | 160,2 | 25666,1 |
| 20 | 3703,5 | 66,4 | 222,1 | 295,1 | 3615,4 | 88,1 | 7768,0 |
|  | 210373,2 |  |  | Дисперсия |   |   | 5685,09 |
|  | 0,971287 |  |  | Стандарт. Ошибка |   |   | 89,74 |
|  |  |  |  | Коэффициент детерминации |   |   | 0,97 |

Сделаем прогноз выручки при затратах на рекламу в 21 месяце на уровне 70 тыс. руб.

Следовательно при рекламном бюджете в 70 тыс. руб. следует ожидать с надежностью 0,95, что фактическая выручка будет равна

 ;

;

 .

Нанесем полученные значения на график (рис. 3).

 

Рис. 3. Структура лага в модели зависимости выручки от размера бюджета на рекламу

Анализ этой модели показывает, что рост размера бюджета на 1 тыс. руб. в текущем периоде приведет через 3 месяца к росту выручки от продаж в среднем на ** тыс. руб.. Соответственно, рост размера бюджета на 1 тыс. руб. в текущем периоде приведет через 2 месяца в среднем на 45,448812 тыс. руб., через 1 месяц в среднем на 33,405622 тыс. руб., а в текущем месяце в среднем на 18,256022 тыс. руб..

Определим относительные коэффициенты регрессии :





Следовательно, 33,6% общего увеличения выручки от продаж, вызванного ростом затрат на рекламу, происходит в текущем месяце; 27,9% - в следующем месяце ; 22,1% - в момент ; 16,4% - в момент .

Средний лаг в этой модели определяется как

.

В среднем увеличение бюджета на рекламу приведет к увеличению выручки через 1,55 месяца.

Для сравнения приведем результаты применения обычного МНК для расчета параметров этой модели с лагом в 3 месяца:



Хотя коэффициент детерминации по модели, параметры ко­торой были рассчитаны обычным МНК, несколько выше, одна­ко стандартные ошибки коэффициентов регрессии в модели, по­лученной с учетом ограничений на полиномиальную структуру лага, значительно снизились. Кроме того, модель, полученная обычным МНК, обладает более существенным недостатком: ко­эффициенты регрессии при лаговых переменных этой модели  нельзя считать статистически значимыми (см . таблицу 7.2)

 Таблица 7.2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Коэффициенты модели* | *Стандартная ошибка* | *t-статистика* | *P-Значение* |
| bo | 459,9971615 | 81,3224001 | 5,656463175 | 0,0001062 |
| Х t | 26,31577231 | 3,515329062 | 7,486005392 | 7,371E-06 |
| X t-1 | 5,335408901 | 5,061688064 | 1,054076986 | 0,3126093 |
| X t-2 | 8,144913603 | 5,195858552 | 1,567578009 | 0,1429582 |
| X t-3 | 14,83533605 | 3,740247489 | 3,966404922 | 0,0018716 |

|  |
| --- |
| Результаты наблюдений зависимости выручки от размера бюджета на рекламу и результаты расчета по математической модели, построенной по МНК с лагом |
|  |  |  |  |  | Для модели по МНК с лагом |
| № месяца | ***Выручка У*** | ***Затраты на рекламу X*** | Z0 | Z1 | Ym | Y-Ym | (Y-Ym)^2 |
| 1 | 1931,3 | 29,6 |   |   |   |   |   |
| 2 | 1973,2 | 29,1 |   |   |   |   |   |
| 3 | 2025,6 | 28,9 |   |   |   |   |   |
| 4 | 2129,8 | 32,1 | 119,7 | 175,9 | 2135,1 | -5,3 | 27,8 |
| 5 | 2218 | 34,3 | 124,4 | 177,2 | 2201,0 | 17,0 | 289,3 |
| 6 | 2343,3 | 37,1 | 132,4 | 185,2 | 2309,5 | 33,8 | 1141,8 |
| 7 | 2473,5 | 41,2 | 144,7 | 202 | 2497,7 | -24,2 | 587,4 |
| 8 | 2622,3 | 43,8 | 156,4 | 218,3 | 2643,5 | -21,2 | 448,4 |
| 9 | 2690,3 | 41,8 | 163,9 | 237,5 | 2679,6 | 10,7 | 113,4 |
| 10 | 2801 | 44 | 170,8 | 253 | 2808,9 | -7,9 | 62,0 |
| 11 | 2877,1 | 46,1 | 175,7 | 259 | 2898,2 | -21,1 | 443,4 |
| 12 | 2875,8 | 42,9 | 174,8 | 259,5 | 2813,4 | 62,4 | 3893,8 |
| 13 | 2965,1 | 48,1 | 181,1 | 267,1 | 2982,9 | -17,8 | 317,2 |
| 14 | 3107,1 | 53,2 | 190,3 | 272,2 | 3150,0 | -42,9 | 1836,6 |
| 15 | 3268,5 | 59,6 | 203,8 | 278,1 | 3340,5 | -72,0 | 5179,3 |
| 16 | 3248,1 | 54,4 | 215,3 | 310,3 | 3356,5 | -108,4 | 11740,7 |
| 17 | 3221,7 | 43,7 | 210,9 | 333,2 | 3174,9 | 46,8 | 2188,4 |
| 18 | 3380,8 | 52 | 209,7 | 331,3 | 3388,8 | -8,0 | 64,7 |
| 19 | 3533,2 | 60 | 210,1 | 302,6 | 3479,4 | 53,8 | 2898,8 |
| 20 | 3703,5 | 66,4 | 222,1 | 295,1 | 3599,3 | 104,2 | 10851,7 |
|  | 210373,2 |  |  | Дисперсия |   |   | 2475,57 |
|  |  |  |  | Стандарт. Ошибка |   |   | 59,22 |
|  |  |  |  | Коэффициент детерминации |   |   | 0,99 |

Для сравнения также приведем результаты применения обычного МНК для расчета параметров линейной модели без лага:

 

 Таблица 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Коэффициенты модели* | *Стандартная ошибка* | *t-статистика* | *P-Значение* |
| a | 643,1508449 | 157,3163657 | 4,088264066 | 0,000690006 |
| b | 47,8736723 | 3,445901878 | 13,89292963 | 4,61628E-11 |

|  |
| --- |
| Результаты наблюдений зависимости выручки от размера бюджета на рекламу и результаты расчета по линейной модели, построенной по МНК без лага  |
|  |  |  | Для линейной модели по МНК без лага |
| № месяца | ***Выручка У*** | ***Затраты на рекламу X*** | YY | Y-YY | (Y-YY)^2 |
| 1 | 1931,3 | 29,6 | 2060,2 | -128,9 | 16618,2 |
| 2 | 1973,2 | 29,1 | 2036,3 | -63,1 | 3978,4 |
| 3 | 2025,6 | 28,9 | 2026,7 | -1,1 | 1,2 |
| 4 | 2129,8 | 32,1 | 2179,9 | -50,1 | 2509,6 |
| 5 | 2218 | 34,3 | 2285,2 | -67,2 | 4518,2 |
| 6 | 2343,3 | 37,1 | 2419,3 | -76,0 | 5770,5 |
| 7 | 2473,5 | 41,2 | 2615,5 | -142,0 | 20177,1 |
| 8 | 2622,3 | 43,8 | 2740,0 | -117,7 | 13857,4 |
| 9 | 2690,3 | 41,8 | 2644,3 | 46,0 | 2118,7 |
| 10 | 2801 | 44 | 2749,6 | 51,4 | 2642,8 |
| 11 | 2877,1 | 46,1 | 2850,1 | 27,0 | 727,5 |
| 12 | 2875,8 | 42,9 | 2696,9 | 178,9 | 31994,0 |
| 13 | 2965,1 | 48,1 | 2945,9 | 19,2 | 369,6 |
| 14 | 3107,1 | 53,2 | 3190,0 | -82,9 | 6877,4 |
| 15 | 3268,5 | 59,6 | 3496,4 | -227,9 | 51948,2 |
| 16 | 3248,1 | 54,4 | 3247,5 | 0,6 | 0,4 |
| 17 | 3221,7 | 43,7 | 2735,2 | 486,5 | 236652,9 |
| 18 | 3380,8 | 52 | 3132,6 | 248,2 | 61612,4 |
| 19 | 3533,2 | 60 | 3515,6 | 17,6 | 310,8 |
| 20 | 3703,5 | 66,4 | 3822,0 | -118,5 | 14033,4 |
|  | 210373,2 | Дисперсия |   |   | 23835,93 |
|  |  | Стандарт. Ошибка |   |   | 183,76 |
|  |  | Коэффициент детерминации |   |   | 0,88 |